練習 37

別解

$(x+1)^{n+1}-1=\{(x+1)-1\}\{(x+1)^n+(x+1)^{n-1}+\cdots+(x+1)^5+(x+1)^4+(x+1)^3+(x+1)^2+(x+1)+1\}$

より，

$(x+1)^{n+1}-1=x\{(x+1)^n+(x+1)^{n-1}+\cdots+(x+1)^5+(x+1)^4+(x+1)^3+(x+1)^2+(x+1)+1\}$

左辺と右辺は $x$ の恒等式だから，各項の係数がそれぞれ等しい。

したがって，$x^5$ の項の係数が左辺と右辺で一致する。

左辺の $x^5$ の項の係数

$${}_{n+1}\mathrm{C}_5=\frac{(n+1)!}{5!\{(n+1)-5\}!}=\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)}{120} \quad \cdots ①$$

右辺の $x^5$ の項の係数

式 $(x+1)^n+(x+1)^{n-1}+\cdots+(x+1)^5+(x+1)^4+(x+1)^3+(x+1)^2+(x+1)+1$ の $x^4$ の項の係数

と等しいから，$${}_n\mathrm{C}_4+{}_{n-1}\mathrm{C}_4+{}_{n-2}\mathrm{C}_4+\cdots+{}_4\mathrm{C}_4=\sum_{k=4}^{n}{}_k\mathrm{C}_4 \quad \cdots ②$$

②＝①より，$\displaystyle\sum_{k=4}^{n}{}_k\mathrm{C}_4=\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)}{120}$